التمرين الأول : (3,3 ن)

■(I) ①

لنبين أن $*$ قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن a و b عنصرين من I .

لدينا : $a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$

$= e^{\ln(b).\ln(a)}$

$= b*a$

و منه : $a*b = b*a$ يعني : $*$ قانون تبادلي في I .

لنبين أن $*$ قانون تجميعي في المجموعة I .

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من I .

$$a*(b*c) = e^{\ln(a).\ln(b*c)}$$

$$= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\ln(b).\ln(c)}\right)}$$

$$= e^{\ln(a).\ln(b).\ln(c)}$$

$$= e^{\ln\left(e^{\ln(a).\ln(b)}\right).\ln(c)}$$

$$= e^{\ln(a*b).\ln(c)}$$

$$= (a*b)*c$$

إذن القانون $*$ تجميعي في المجموعة I .

■ ②

ليكن ε العنصر المحايد القانون $*$ في المجموعة I

و هذا يعني : $a*\varepsilon = \varepsilon*a = a \; ; \; (\forall a \epsilon I)$

لتحديد قيمة ε ننطلق من إحدى المتساويتين $a*\varepsilon = a$ أو $\varepsilon*a = a$

الكتابة : $a*\varepsilon = a$.

تعني : $e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)} = a$

تعني : $\ln(a).\ln(\varepsilon) = \ln(a)$

تعني : $\ln(\varepsilon) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$

تعني : $\varepsilon = e$

نتأكد من أن ينتمي إلى المجال $]0;+\infty[$

بالفعل $e \approx 2,72$ أكبر قطعا من 0

إذن : $e \epsilon I$

و منه القانون يقبل عنصرا محايدا و هو العدد e

■ ③ أ

ليكن a و b عنصرين من المجموعة $I \setminus \{1\}$.

هذا يعني أن $a \neq 1$ و $b \neq 1$

و منه : $\ln(b) \neq 0$ و $\ln(a) \neq 0$

يعني : $\ln(a).\ln(b) \neq 0$

و منه : $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

نستنتج أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} > 0$ و $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

و هذا يعني بكل بساطة أن : $e^{\ln(a).\ln(b)} \epsilon \; I \setminus \{1\}$

أي : $a*b \; \epsilon \; I \setminus \{1\}$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $I \setminus \{1\}$

تبادلية و تجميعية القانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
نستنتجه من المجموعة I لأن $I \setminus \{1\}$ جزء من I

بما أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I فإن $*$ تبادلي و تجميعي
كذلك في المجموعة $I \setminus \{1\}$ لأن $I \setminus \{1\} \subset I$

لدينا e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I

إذن e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$
لأن $e \neq 1$ أي $e \epsilon I \setminus \{1\}$

ليكن a عنصرا من المجموعة $I \setminus \{1\}$

x مقلوب للعنصر a في المجموعة $I \setminus \{1\}$

يعني : $a*x = x*a = e$

ننطلق من الكتابة $a*x = e$

هذا يعني أن $e^{\ln(a).\ln(x)} = e$ و منه : $\ln(a).\ln(x) = 1$

أي : $\ln(x) = \dfrac{1}{\ln(a)}$ يعني : $x = e^{\frac{1}{\ln(a)}}$

بما أن : $a \epsilon I \setminus \{1\}$ فإن $a \neq 1$

و هذا يعني أن : $\ln(a) \neq 0$

و منه : $\dfrac{1}{\ln(a)} \neq 0$ يعني : $e^{\frac{1}{\ln(a)}} \neq 1$

أي : $e^{\frac{1}{\ln(a)}} \epsilon I \setminus \{1\}$

نستنتج أن كل عنصر a من المجموعة $I \setminus \{1\}$ يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ من نفس المجموعة $I \setminus \{1\}$

<u>خلاصة</u> : لقد تمكنا من أن نبرهن على أن $*$ قانون تركيب داخلي في
المجموعة $I \setminus \{1\}$ و له عنصر محايد e و كل عنصر a يقبل
مقلوبا $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ في المجموعة $I \setminus \{1\}$

و بالتالي $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية.

■ ③ ب

أولا ، نلاحظ أن $]1;+\infty[\subset I \setminus \{1\}$

لأن : $I \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$

و كذلك : $]1;+\infty[\neq \emptyset$

و هذا يعني أن $]1;+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I \setminus \{1\}$

يكفي الآن أن نبرهن على نه إذا كان a و b عنصرين من $]1,+\infty[$

فإن : $a*b'\epsilon]1,+\infty[$ بحيث b' هو مقلوب b في $I\setminus\{1\}$

ننطلق من الكتابة :

$$\begin{aligned} a*b' &= a*\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right) \\ &= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)} \\ &= e^{\ln(a).\frac{1}{\ln(b)}} \\ &= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $a\epsilon]1,+\infty[$ و $b\epsilon]1,+\infty[$

يعني $b>1$ و $a>1$

يعني $\ln b>0$ و $\ln a>0$ يعني : $\dfrac{ln(a)}{ln(b)}>0$

إذن : $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}\epsilon\,]1,+\infty[$ و منه $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}>1$

يعني : $a*b'\epsilon]1,+\infty[$

الوضعية التي نتوفر عليها الآن هي $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

$]1,+\infty[$ جزء غير منعدم من المجموعة $I\setminus\{1\}$

$(\forall(a,b)\epsilon]1;+\infty[)\ ;\ a*b'\epsilon\,]1;+\infty[$

نستنتج من هذه الوضعية أن $(]1,+\infty[,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I\setminus\{1\},*)$.

■ ④ أ

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من المجموعة I .

يكون $*$ توزيعيا بالنسبة للقانون $\times$ إذا كان :

$$\begin{cases} a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c) \\ (a\times b)*c=(a*c)\times(b*c) \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} a*(b\times c) &= e^{\ln(a).\ln(b\times c)} \\ &= e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a)\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)}\times e^{\ln(a).\ln(c)} \\ &= (a*b)\times(a*c) \end{aligned}$$

و بما أن القانون $*$ تبادلي نستنتج المتساوية الأخرى

و بالتالي : القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$

■ ④ب

لدينا I جزء غير منعدم من $\mathbb{R}^*$

ليكن x و y عنصرين من I

إذن : $x>0$ ز $y>0$. و منه : $\dfrac{x}{y}>0$ أي : $x\times y^{-1}>0$.

إذن : $(x\times y^{-1})\,\epsilon\,I$

إذن $(I,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$.

و لدينا حسب السؤال ④ أ : $*$ توزيعي بالنسبة لـ $\times$.

و لدينا كذلك : حسب السؤال ③ أ $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

و بالتالي $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

■ (II) ①

بعد الحساب سوف تحصل على النتائج التالية :

$$A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad و \quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

■ ②

نفترض أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I$.

بحيث : $\times$ هو ضرب المصفوفات و I هي المصفوفة : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ننطلق من الكتابة $A\times A^{-1}=I$

نضرب طرفي هذه المتساوية في A^2 نحصل على : $A^3\times A^{-1}=A^2$

إذن : $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و هذا تناقض واضح لأن : $A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و بالتالي المصفوفة A لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ ① أ

ليكن العدد العقدي $x+iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي : $3+4i$

هذا يعني أن : $(x+iy)^2=3+4i$

$$\Leftrightarrow\ x^2-y^2+i(2xy)=3+4i$$

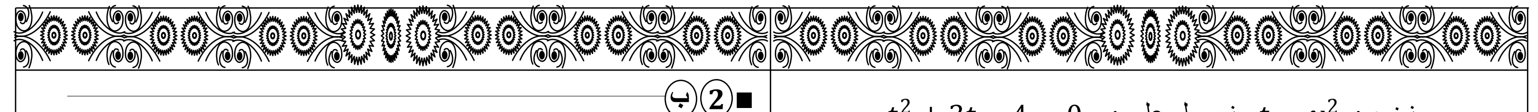
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=3\\2xy=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=3\\xy=2\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نحصل على : $x^2=\dfrac{4}{y^2}$

نعوض x^2 في المعادلة الأولى نجد : $\dfrac{4}{y^2}-y^2=3$

يعني : $y^4+3y^2-4=0$



نضع : $t = y^2$ نحصل على : $t^2 + 3t - 4 = 0$

هذه المعادلة تقبل الحلين $t_1 = 1$ و $t_2 = -4$

الحل t_1 يمدنا بـ $y = -1$ أو $y = 1$.

والحل t_2 يمدنا بـ $y = -2i$ أو $y = 2i$.

إذن المعادلة : $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$ تقبل أربعة حلول. نعوض كل قيمة لـ y في النطمة لإيجاد قيمة x الموافقة.

إذا كان $y = 1$ فإن : $x = 2$

إذا كان $y = -1$ فإن : $x = -2$

إذا كان $y = 2$ فإن : $x = -i$

إذا كان $y = -2$ فإن : $x = i$

بعد ذلك نكتب الجذور المربعة التي حصلنا عليها و هي :

في الحالة الأولى : $x + iy = 2 + i$.

في الحالة الثانية : $x + iy = -2 - i$.

في الحالة الثالثة : $x + iy = -2 - i$.

في الحالة الرابعة : $x + iy = 2 + i$.

و بالتالي : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$.

■ ① ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$.

بعد حساب المميز Δ نجد : $\Delta = 4(3 + 4i)$.

لدينا حسب السؤال ① أ : $(3 + 4i)$ يقبل جذرين مربعين فقط و هما : $(2 + i)$ و $(-2 - i)$.

نختار $(2 + i)$ نحصل على : $\Delta = [2(2 + i)]^2$.

و منه (E) تقبل الحلين a و b كما يلي :

$$a = i - \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$$

عندما نختار الجذر المربع الثاني لـ $(3 + 4i)$ نحصل على نفس النتيجة.

■ ② أ

لدينا :

$$a(1 - i) = \left(i - \frac{1}{2}\right)(1 - i) = i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = b$$

■ ② ب

لدينا :

$$\frac{b - a}{0 - a} = -\frac{b}{a} + 1 = -(1 - i) + 1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

إذن :

$$\frac{b - a}{0 - a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AO} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة O

■ ③ أ

لدينا : $B \xrightarrow{R_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران : $(d - c) = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - c)$

$$\Leftrightarrow \quad d = c + i(b - c)$$

$$\Leftrightarrow \quad d = c + ib - ic$$

$$\Leftrightarrow \quad c(1 - i) = d - ib$$

$$\Leftrightarrow \quad c(1 - i) = d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad c(1 - i) = d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \left(\frac{1}{1 - i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{i}{2}}{1 - i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}(1 + i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right)$$

■ ③ ب

لدينا : $D \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AO}}} L$

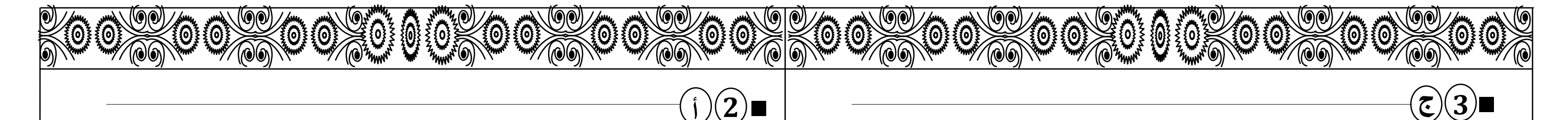
إذن حسب تعريف الإزاحة : $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO}$

$$\Leftrightarrow \quad (\ell - d) = (0 - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\ell + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -a$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell + (i - 1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - i$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = (1 - i)c - \frac{i}{2} - 1$$



3) ج

لدينا : $\frac{\ell - c}{a - c} = \frac{(1-i)c - 1 - \frac{i}{2} - c}{i - \frac{1}{2} - c}$

$= \frac{-ic - 1 - \frac{i}{2}}{i - \frac{1}{2} - c} = \frac{i\left(-c + i - \frac{1}{2}\right)}{i - \frac{1}{2} - c} = i$

إذن : $\frac{\ell - c}{a - c} = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CL}{CA} = 1 \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث ALC متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1)

في البداية وجب التذكير بخاصيتين هامتين :

الخاصية الأولى : في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان a يقسم b و c فإنه يقسم كل تأليفة خطية لهما:$(ub + vc)$.

بتعبير آخر : $\begin{cases} a / b \\ a / c \end{cases} \Longrightarrow (\forall u, v \in \mathbb{Z}) : a/(ub + vc)$

الخاصية الثانية (un premier qui divise un produit)

كل عدد أولي يقسم جداء عددين فإنه بالضرورة يقسم أحدهما.

بتعبير آخر : $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p / ab \end{cases} \Longrightarrow (p/a)$ أو (p / b)

ننطلق إذن من الكتابة : $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

$\Leftrightarrow \quad 5 / (m^2 + 1)$

و نعلم أن $5 / (-5)$

إذن حسب الخاصية الأولى : $5 / (m^2 + 1 - 5)$

يعني : $5 / (m - 2)(m + 2)$

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية :

$5/(m-2)$ أو $5 / (m + 2)$

و منه حسب الخاصية الأولى :

$5/(m-2)$ أو $5 / (m + 2 - 5)$

يعني : $m \equiv 2[5]$ أو $m \equiv 3[5]$

في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m \in \{\bar{2}, \bar{3}\}$

2) أ

ليكن p عددا أوليا .و k و n عددين صحيحين طبيعيين

ننطلق إذن من الكتابة : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

$\Leftrightarrow \quad n^2 \equiv -1[p]$

$\Leftrightarrow \quad (n^2)^{(\text{عدد فردي})} \equiv (-1)^{(\text{عدد فردي})}[p]$

$\Leftrightarrow \quad (n^2)^{(2k+1)} \equiv -1[p]$

2) ب

لدينا حسب السؤال (أ) $(n^2)^{(2k+1)} \equiv -1[p]$

$\Leftrightarrow \quad (\exists u \in \mathbb{Z}) \; : \; (n^2)^{(2k+1)} + 1 = pu$

$\Leftrightarrow \quad (\exists u \in \mathbb{Z}) \; : \; pu + n\underbrace{\left(-n^{4k}\right)}_{v} = 1$

$\Leftrightarrow \quad (\exists \, u, v \in \mathbb{Z}) \; : \; pu + nv = 1$

و بالتالي حسب Bezout : $n \wedge p = 1$

2) ج

لدينا p عدد أولي .و $n \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat : $n^{p-1} \equiv 1[p]$

و نعلم أن $p = 4k + 3$ إذن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$

2) د

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود العدد n بحيث: $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

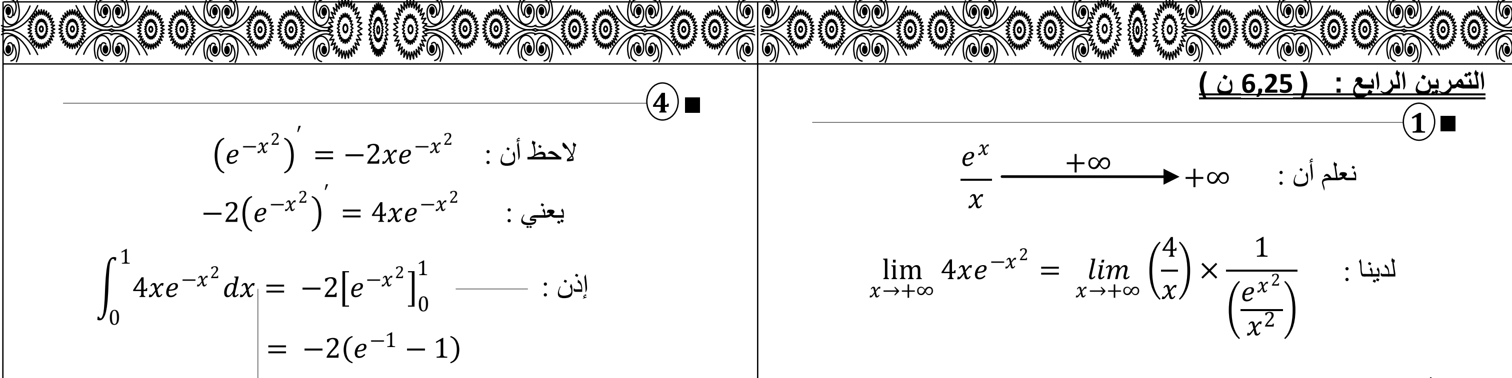
إذن : $\begin{cases} (n^2)^{2k+1} \equiv -1[p] \\ (n^2)^{2k+1} \equiv 1[p] \end{cases}$

و منه : $1 \equiv -1[p]$ أي : $p / 2$

بما أن p عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن : $p = 2$

و هذا مستحيل لأنه لا وجود لعدد صحيح طبيعي k يحقق $4k + 3 = 2$

و بالتالي لا وجود لعدد صحيح طبيعي n يحقق : $n^2 + 1 \equiv 0[p]$



التمرين الرابع : (6,25 ن)

■ ①

نعلم أن : $\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{x}\right) \times \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{x^2}}{x^2}\right)}$

نضع:

إذن النهاية تصبح : $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{4}{\sqrt{t}}\right) \times \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)} = 0$

■ ②

لدينا : $f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)(-2xe^{-x^2})$

$= (1-2x^2)(4e^{-x^2})$

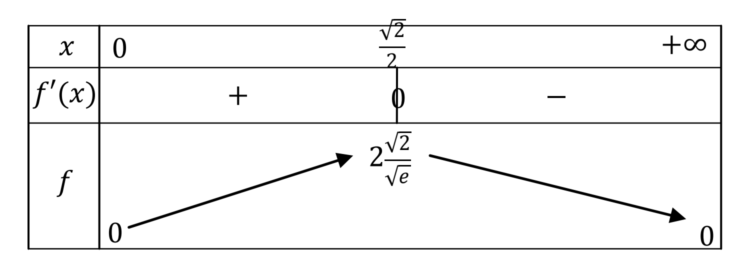
بما أن : $4e^{-x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $1-2x^2$

إذا كان : $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ فإن $f'(x) > 0$.

و نلخص النتائج في الجدول التالي :



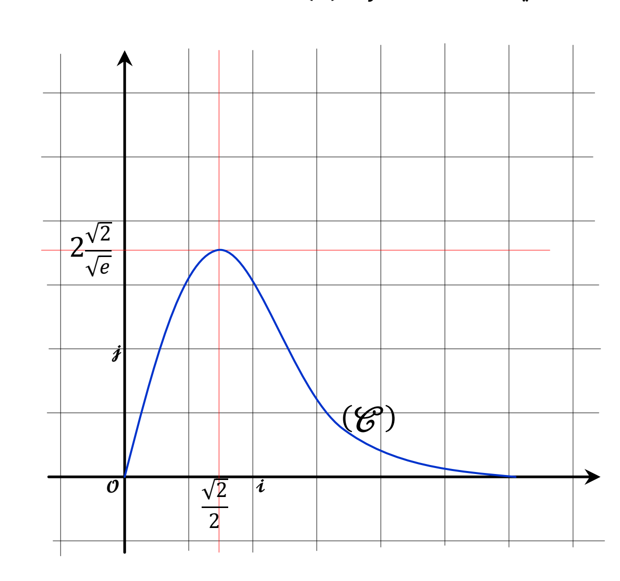
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	↘	0

■ ③

معادلة المماس لـ $(\mathscr{C})$ في النقطة O هي :

$(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

يعني : $(\Delta) : y = 4x$ مع $x \geq 0$



■ ④

لاحظ أن : $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$

يعني : $-2\left(e^{-x^2}\right)' = 4xe^{-x^2}$

إذن : $\displaystyle\int_0^1 4xe^{-x^2}dx = -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$

$= -2(e^{-1} - 1)$

$= 2(1-e^{-1}) = a$

مساحة الحيز S تقاس باستعمال التكامل التالي :

$$S = \int_0^1 f(x)dx$$

بما أن : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ فإن العدد $2(1-e^{-1})$

يعني في الواقع $2unités(1unité - e^{-1}unité)$

في هذا التمرين لدينا : $1unité = 2cm$ إذن $a = 8(1-e^{-1})\ cm^2$

الجزء الثاني

■ ① أ

ليكن x عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1

لدينا : $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

$\Rightarrow -x^2 < -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$

لأن الدالة $x \to e^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

■ ① ب

لدينا : $(\forall x > 1) :\ 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن : $(\forall x > 1) :\ 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

من جهة أخرى لدينا :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{-x}{n}}\right)^n$

$= \lim\limits_{\substack{u\to-\infty \\ u=-\frac{x}{n}}} (-nue^u)^n = 0$

($ue^u \to 0$ عندما $u \to -\infty$)

بنفس الطريقة نبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x^2} = 0$

إذن : $(\forall x > 1) :\ 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

(عندما $x \to +\infty$: $0 \to 0$ ، $4x^n e^{-x^2} \to 0$ ، $4x^n e^{-x} \to 0$)

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$

■ ②

لدينا : $f_n'(x) = 4e^{-x^2}x^{n-1}(n-2x^2)$

بما أن $4e^{-x^2}x^{n-1} > 0$ فإن إشارة $f_n'(x)$
تتعلق فقط بإشارة $n-2x^2$

إذا كان : $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) = 0$.

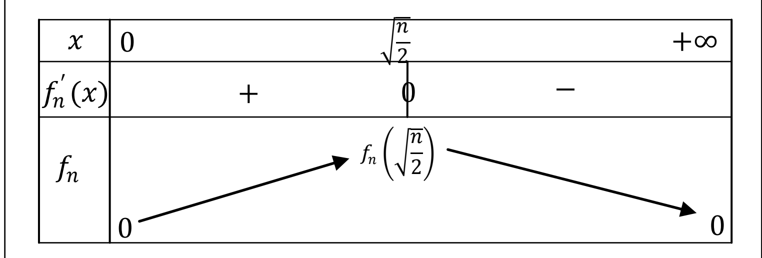
إذا كان : $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن $f_n'(x) > 0$.

و لدينا : $\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} 4x^n e^{-x^2} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :



x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
f_n	0 ↗	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	↘ 0

■ ③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

لنبين أن $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

ليكن x عنصرا من $[0,1]$ إذن $0 \le x \le 1$

و منه : $0 \le x^2 \le 1$

نعلم أن : $0 \le 2 \le n$

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على : $0 \le 2x^2 \le 1$

إذن : $0 \le x \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$ و منه نستنتج أن : $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

بما أن f_n متصلة و تزايدية قطعا على $\left[0,\frac{\sqrt{n}}{2}\right]$ و لدينا $[0,1] \subset \left[0,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right]$

إذن : f_n متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$

و بالتالي : f_n تقابل من $[0,1]$ نحو صورته $\left[0,\frac{4}{e}\right]$

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

لدينا : $g_n(0).g_n(1) = (f_n(0)-1)(f_n(1)-1)$

$= (0-1)\left(\frac{4}{e}-1\right)$

$\approx -0{,}47 < 0$

جميع النتائج المحصل عليها لحد الآن تخول لنا استعمال مبرهنة القيم الوسيطية

و بالتالي : يوجد عدد حقيقي وحيد u_n محصور بين 0 و 1

و يحقق : $g_n(u_n) = 0$

أو بتعبير آخر : المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا u_n من المجال $]0,1[$

■ ④ أ

لدينا : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

$\Rightarrow \quad f_{n+1}(x) = 4x^{n+1}e^{-x^2}$

$\Rightarrow \quad f_{n+1}(x) = x\left(4x^n e^{-x^2}\right)$

$\Rightarrow \quad f_{n+1}(x) = x f_n(x)$

و منه : $f_{n+1}(u_n) = u_n . f_n(u_n)$

لدينا حسب السؤال ③ $f_n(u_n) = 1$

إذن : $f_{n+1}(u_n) = u_n . 1 = u_n$

■ ④ ب

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$.

و لدينا كذلك : $u_n < 1$ لأن $u_n \epsilon]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

لأن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$ حسب السؤال ④ أ

و : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ حسب السؤال ③

و بما أن f_{n+1} تقابل (متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$)

فإن : $u_n < u_{n+1}$

و منه $(u_n)_n$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة بالعدد 1 ($u_n < 1$) فإنها متقاربة

■ ⑤ أ

لدينا : $0 < u_n < 1$ إذن : $0 < \lim_\infty (u_n) \le 1$

و منه : $0 < \ell \le 1$

المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة و تزايدية إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر و هذا ما يبرر الكتابة $0 < \ell \le 1$. و هذه النهاية يمكن أن تساوي 1 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية . و في هذه الحالة نقول بأن العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n \, , n \ge 2\}$.

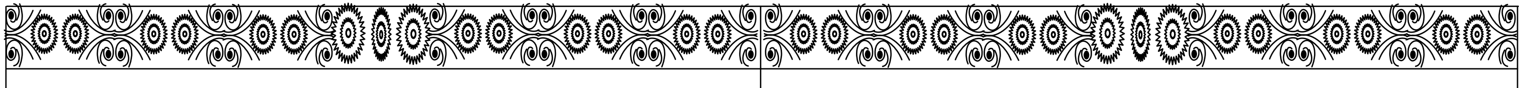
■ ⑤ ب

لدينا : $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < (u_n)^2 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 1 < e^{(u_n)^2} < e$

نعلم أن : $f(u_n) = 1$

يعني : $4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$



و منه : $e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

ننطلق من : $1 < e^{(u_n)^2} < e$

إذن : $1 < 4(u_n)^n < e$

نعلم أن الدالة ln تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ إذن :

$$0 < \ln(4(u_n)^n) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \ln(4) + n\ln(u_n) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

■ 5 ج

بما أن : $\underbrace{\frac{-\ln 4}{n}}_{} < \ln(u_n) < \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}}_{}$ (عندما $n \to +\infty$ ، كلاهما يؤول إلى 0)

إذن بالضرورة : $\lim_{n\infty} \ln(u_n) = 0$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي : $\ell = 1$

التمرين الخامس : (3,75 ن

■ 1

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع : $y = -t$ إذن $dy = -dt$

إذا كان : $t = -x$ فإن $y = x$.

إذا كان : $t = -2x$ فإن $y = 2x$.

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)} dy$$
$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy$$
$$= -F(x)$$

إذن : F دالة فردية .

■ 2 أ

ليكن : $x > 0$

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

$$= \int_x^{1} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{ln(1+t^2)} dt$$

$$= -\int_1^{x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$
$$= -\varphi(x) + \varphi(2x)$$

■ 2 ب

لدينا : $F(x) = -\varphi(x) + \varphi(2x)$

الدالة $x \to \varphi(x)$ قابلة للإشتقاق .

لأن $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ دالة متصلة إذن تقبل دالة أصلية و هي $\varphi(x)$

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا كذلك : $x \to \varphi(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق

و بالتالي F قابلة للإشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق.

إذن : $F'(x) = -\varphi'(x) + 2\varphi'(2x)$

$$= \frac{-1}{ln\,(1+x^2)} + \frac{2}{ln\,(1+4x^2)}$$
$$= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\,.\ln(1+x^2)}$$
$$= \frac{\ln[(1+x^2)^2] - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\,.\ln(1+x^2)}$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{\ln(1+4x^2)\,.\ln(1+x^2)}$$

■ 2 ج

لدينا : $x > 0$

إذن : $1 + x^2 > 1$ و $1 + 4x^2 > 1$

و منه : $\ln(1+4x^2)\,.\ln(1+x^2) > 0$

و بالتالي إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

لنحل المعادلة : $ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4+2x^2+1 = 1+4x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2(x^2-2) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$ أو $x = 0$

نحن بصدد دراسة تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$

إذن سوف نهتم بالحالة $x=\sqrt{2}$ فقط.

إذا كان $x=\sqrt{2}$ فإن $x^2(x^2-2)>0$

و منه : $$\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}>1$$

يعني : $$ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)>0$$

إذن : $$F'(x)>0$$

يعني F تزايدية قطعا على $[\sqrt{2},+\infty[$:

في الحالة الأخرى نجد أن F تناقصية على المجال $]0,\sqrt{2}[$.

■ 3 أ

ليكن $x>0$ إذن $2x>0$

و منه : $[x,2x]\subset]0,+\infty[$

و بما أن φ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

فإن φ متصلة و قابلة للإشتقاق على : $]x,2x[$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists c\epsilon]x,2x[):\ \frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{2x-x}=\varphi'(c)$$

يعني : $$(\exists c\epsilon]x,2x[):\ \varphi(2x)-\varphi(x)=x\varphi'(c)$$

يعني : $$\boxed{F(x)=\frac{x}{\ln(1+c^2)}}$$

■ 3 ب

لدينا حسب السؤال (أ) $0<x<c<2x$

$$\Rightarrow\ 0<x^2<c^2<4x^2$$

$$\Rightarrow\ 0<\ln(1+x^2)<\ln(1+c^2)<\ln(1+4x^2)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\ln(1+4x^2)}<\frac{1}{\ln(1+c^2)}<\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<\frac{x}{\ln(1+c^2)}<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

■ 3 ج

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\boxed{\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}}$$

و لدينا : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x^2)}=+\infty$$

يكفي أن نستعمل : $$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\right)$$

و لدينا كذلك: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=+\infty$$

إذن : $$\left(\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty\right)$$

و بنفس الطريقة و باستعمال النهاية : $$\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty\right)$$

نجد : $\left(\lim_{x\to0^+}F(x)=+\infty\right)$ و $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0\right)$

■ 3 د

لدينا حسب السؤال (ب) $$F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}$$

و لدينا : $\sqrt{e-1}\approx1{,}31>0$

إذن : $$F(\sqrt{e-1})<\frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+(e-1))}$$

يعني : $$\boxed{F(\sqrt{e-1})<\sqrt{e-1}}\quad(1)$$

و لدينا كذلك: $\frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)$ و $\frac{\sqrt{e-1}}{2}\approx0{,}65>0$

إذن : $$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)}$$

يعني : $$\boxed{F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\frac{\sqrt{e-1}}{2}}\quad(2)$$

نضع : $G(x)=F(x)-x$

من (1) و(2) نستنتج : $$\boxed{G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).G(\sqrt{e-1})<0}\quad(3)$$

لدينا F دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]0,\sqrt{2}]$

إذن G دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]0,\sqrt{2}]$ (4)

لأن : $G'(x)=F'(x)-1<0$

من (3) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية وجود حل وحيد للمعادلة $G(x)=0$ أو المعادلة $F(x)=x$ في المجال $]0,\sqrt{2}]$.